CHAPITRE 1 :
Taux d'évolution et exposants réels

I. Taux d'évolution (Rappels)

1) Variation absolue et taux d'évolution

$$\boxed{V_D} \longrightarrow \boxed{V_A}$$

La **variation absolue** entre V_D et V_A est le nombre $\mathbf{V_A - V_D}$

La **variation relative (ou taux d'évolution)** entre V_D et V_A est $\mathbf{\dfrac{V_A - V_D}{V_D}}$

Exemple : La population (en millions) d'un pays était de 300 en 1990 et de 309 en 2000.

La variation absolue de cette population entre 1990 et 2000 est de : 309 – 300 = 9

Le taux d'évolution de cette population entre 1990 et 2000 est de : $\dfrac{309 - 300}{300} = 0{,}03$
(soit une augmentation de 3 %)

Remarques :

1. Un taux d'évolution positif correspond à une augmentation
2. Un taux d'évolution négatif correspond à une diminution
3. Un taux d'évolution peut s'exprimer en pourcentage (pour cela on multiplie par 100)

Evolution de 0,03 = augmentation de 3%
Evolution de – 0,03 = diminution de 3%

2) Coefficient multiplicateur

Pour augmenter une quantité de t % on multiplie par $1 + \frac{t}{100}$

Pour diminuer une quantité de t % on multiplie par $1 - \frac{t}{100}$

Ce nombre s'appelle le coefficient multiplicateur (ou multiplicatif)

Remarques :

- Pour une baisse, CM < 1
- Pour une augmentation, CM > 1

Exemples :

Si on veut augmenter de 3% (évolution de 0,03) : on multiplie par $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$

Augmenter de 100% (évolution de 1): on multiplie par 2
Augmenter de 0,15 (augmentation de 15 %) : on multiplie par 1,15

Si on veut diminuer de 20%, on multiplie par $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$

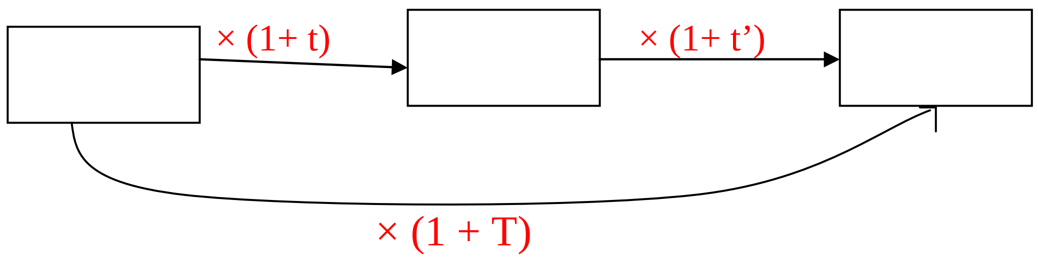
Pour une évolution de – 0,2, on multiplie par 1 - 0,2

Calcul du taux d'évolution

CM = 1 + t donc **le taux d'évolution est : t = CM – 1**

Exemple :
- Si le CM est 1,23 alors c'est une augmentation de 23% 1,23 - 1= 0,23
- Si le CM est 0,52 alors c'est une diminution de 48% 0,52 - 1= - 0,48

3) Evolutions successives



On considère 2 évolutions successives : la première de taux t et la deuxième de taux t'.
L'évolution globale (de taux T) a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :

$$\mathbf{1 + T = (1 + t)(1 + t')}$$

Par conséquent, le taux global T est égal à $T = (1 + t)(1 + t') - 1$

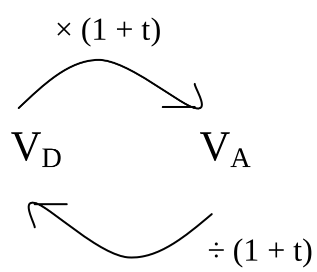
Exemple :
Le prix d'un article augmente de 15%, puis diminue de 20% pour augmenter encore de 3%. Quel est le pourcentage total d'évolution ?

$$(1 + \frac{15}{100}) \times (1 - \frac{20}{100}) \times (1 + \frac{3}{100}) = 1{,}15 \times 0{,}8 \times 1{,}03 = 0{,}9476$$

t = CM – 1= 0,9476 – 1= -0,0524 soit 5,24%

Le prix a baissé finalement de 5,24%

4) Evolution réciproque



Le CM du taux d'évolution réciproque est $\mathbf{\dfrac{1}{1 + \mathit{t}}}$

Exemple : Quel taux faut-il appliquer pour compenser une hausse de 8% ?

Le CM du taux d'évolution réciproque est : $\dfrac{1}{1{,}08} \approx 0{,}9259$

0,9259 – 1 = - 0,0741 soit une diminution de 7,41%

II. Exposants réels

1) Généralisation et propriétés des exposants

Les propriétés des exposants entiers s'étendent à tous les exposants réels

Propriétés

Soient a, b, x et y des nombres réels, a et b étant strictement positifs.

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad 1^x = 1$

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$(ab)^x = a^x b^x$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

2) Exposants 1/n

Propriété

Pour a > 0 et n entier naturel non nul : $(a^n)^{1/n} = a$

Exemple : $(5^4)^{1/4} = 5^{4\times 1/4} = 5^1 = 5$

3) Equation $x^n = a$ (a > 0 et n entier positif)

Le nombre $a^{1/n}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^n = a$

Exemples :

- La solution positive de l'équation $x^7 = 4$ est $4^{1/7}$. ($4^{1/7} \approx 1,219$)
- Résoudre l'équation $(1+x)^3 = 2$

  $1+x = 2^{1/3}$ $\quad x = 2^{1/3} - 1 \approx 0,25992$

Remarque :

Il existe une autre notation pour le nombre $a^{1/n}$

La solution positive de l'équation $x^2 = 5$ est $5^{1/2} = \sqrt{5}$

La solution positive de l'équation $x^3 = 5$ est $5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$

$a^{1/n}$ peut aussi être notée $\sqrt[n]{a}$ (racine $n^{\text{ième}}$ de a)

III. Taux d'évolution moyen et moyenne géométrique

On considère n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
Le taux d'évolution global T correspondant à toutes ces évolutions vérifie :

$$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n)$$

1) Taux d'évolution moyen

Définition

Le **taux d'évolution moyen** est le taux unique t qui répété n fois, fournit le même taux global T.

Méthode pour calculer le taux moyen :
Le CM associé à n évolutions successives de taux t est : $\mathbf{(1 + t)^n}$
Le CM global est : 1 + T
Donc : $\mathbf{(1 + t)^n = 1 + T}$

Exemple 1 :
Le prix d'un article augmente de 20% puis diminue de 8% puis augmente de 13%.
Quel est le taux d'évolution moyen de ce prix ?

$1,2 \times 0,92 \times 1,13 = 1,24752$

$(1 + t)^3 = 1,24752$
$1 + t = 1,24752^{1/3}$
$t = 1,24752^{1/3} - 1$
$t \approx 0,0765$

En moyenne, le prix a donc augmenté de 7,65%.

Exemple 2 :
Une entreprise affiche un taux d'évolution annuel de 0,1.

a) On calcule son taux moyen mensuel :

$(1 + t)^{12} = 1 + 0,1$
$(1 + t)^{12} = 1,1$
$t = 1,1^{1/12} - 1 \approx 0,008$

Le taux mensuel est d'environ 0,008 soit un taux d'augmentation de 0,8%.

b) On calcule son taux moyen trimestriel :

$(1 + t)^4 = 1 + 0,1$
$(1 + t)^4 = 1,1$
$t = 1,1^{1/4} - 1 \approx 0,024$

Le taux trimestriel est d'environ 0,024 soit un taux d'augmentation de 2,4%.

2) Moyenne géométrique

Définitions

La **moyenne géométrique de 2 nombres a et b** est le nombre $\sqrt{ab}$ ou $(ab)^{1/2}$

La **moyenne géométrique de n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$** est le nombre $(a_1a_2...a_n)^{1/n}$

Pour calculer le CM du taux d'évolution moyen, on utilise donc la moyenne géométrique des CM des évolutions successives :

$$1 + t = (1 + T)^{1/n}$$

$$1 + t = [(1 + t_1)(1 + t_2)\ldots(1 + t_n)]^{1/n}$$

IV. Indice simple en base 100

Un indice simple traduit une évolution par rapport à une quantité de référence.
Par commodité, on écrira souvent indice au lieu d'indice simple.

Exemple : On s'intéresse à la population d'un zoo.
On veut étudier l'évolution de cette population par rapport à l'année 2000.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang	1	2	3	4	5	6
Population (y)	1250	1200	1000	1250	1500	2000
Indice	100	**96**	**80**	**100**	**120**	**160**

Le taux d'évolution entre 2000 et 2001 est $\frac{1200 - 1250}{1250} = - 0,04$

Avec ce taux d'évolution de - 0,04, si il y avait eu 100 animaux en 2000, il y en aurait 96 en 2001.

96 est **l'indice de la population en 2001 avec pour base 100 en 2000**

1) Indices

Définition

On appelle **indice simple en base 100 de y_2 par rapport à y_1** le nombre

$$\mathbf{I = 100 \times \frac{y_2}{y_1}}$$

Exemple :
L'indice de la population en 2001 avec pour base 100 en 2000 est égal à :

$$\mathbf{I = 100 \times \frac{y_2}{y_1} = 100 \times \frac{1200}{1250} = 96}$$

L'indice de la population en 2005 avec pour base 100 en 2000 est égal à :

$$\mathbf{I = 100 \times \frac{y_6}{y_1} = 100 \times \frac{2000}{1250} = 160}$$

2) Lien entre indices et taux d'évolution

- Un indice permet de connaître directement le pourcentage d'évolution **entre la date de référence et une autre**.

Exemple : l'indice correspondant à l'année 2005 est égal à 160
160 – 100 = 60
Entre 2000 et 2005, la population du zoo a donc augmenté de 60%

- Pour calculer le taux d'évolution **entre deux dates quelconques**

Exemple : entre 2001 et 2005
L'indice en 2001 est de 96
L'indice en 2005 est de 160

$\dfrac{160 - 96}{96} \approx 0{,}6667$ soit une augmentation d'environ 66,67%

V. Approximation d'un taux d'évolution

Les approximations suivantes ne sont valables que pour un taux t très proche de zéro

Deux évolutions successives au taux t (t voisin de zéro) correspondent approximativement à une évolution au taux 2t

$$\mathbf{(1 + t)^2 \approx 1 + 2t}$$

<u>Exemple</u> :
Un article vaut 34€.
1) Son prix augmente deux fois de 0,7%.
Le nouveau prix est d'exactement $34\times(1{,}007)^2 \approx 34{,}478$
Avec l'approximation on trouve $34\times1{,}014 \approx 34{,}476$ bonne approximation
2) Si le prix augmente deux fois de 7%
Le nouveau prix est d'exactement $34\times(1{,}07)^2 \approx 38{,}9266$
Avec l'approximation on trouve $34\times1{,}14 \approx 38{,}76$ approximation moins bonne
3) Si le prix augmente deux fois de 70%
Le nouveau prix est d'exactement $34\times(1{,}7)^2 \approx 98{,}26$
Avec l'approximation on trouve $34\times2{,}4 \approx 81{,}6$
l'approximation ne marche plus car t est trop grand

Le taux réciproque d'une évolution au taux t (t voisin de zéro) est approximativement de -t

$$\frac{1}{1+t} \approx 1 - t$$

<u>Exemple</u> :
Un article vaut 34€ en février.
Entre le mois de janvier et de février, son prix a augmenté de 0,5%.
En janvier, il coûtait $34\times\frac{1}{1+0{,}005} \approx 33{,}8308$
L'approximation nous donne : $34\times(1 - 0{,}005) = 34\times0{,}995 = 33{,}83$

Remarque : avec un taux de 50%, le prix de janvier est de 22,67€ alors que l'approximation donne 17 !